Logaritmikus egyenletek

Folytatjuk a logaritmikus egyenleteket tovább.

A következő szabályok segítségével dolgozunk továbbra is:

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$
2. $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
3. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a a^n = n$

Szeretném, hogy a következő feladatokat az iskolai füzetbe oldjátok meg.

1. $\log_5(6 + 8x) + 2 = \log_5(4x - 1)$
2. $\log_2 8 + \log_2(5x - 7) = \log_2(2x + 9)$
3. $\log_2(4 - 5x) - \log_2(8x + 1) = 3$
4. $\log_3(6x + 4) + \log_3 9 = \log_3(10 - 5x)$

Megoldás:

1.

$$\log_5(6+8x)+\mathbf{2}=\log_5(4x-1)$$

Az ötödik szabály alapján bármely szám leírható logaritmus segítségével is. Mivel az egyenletben mindkét logaritmusnak 5-ös alapja van, így a 2-est is 5-ös alapú logaritmus alakban szeretnénk felírni. Tehát az 5. szabály alapján: $2=\log_5 5^2$

$$\log_5(6+8x)+\mathbf{\log_5 5^2}=\log_5(4x-1)$$

A jobb oldalon az első szabályt alkalmazva megkapjuk a következőt:

$$\log_5((6+8x)\cdot 5^2)=\log_5(4x-1)$$

$$\log_5((6+8x)\cdot 25)=\log_5(4x-1)$$

Mivel mindkét oldalon a logaritmus „egyedül van”, és mivel mindkettőnek 5-ös alapja van, ezért elhagyhatjuk a logaritmus függvényt, és az argumentumokat kiegyenlíthetjük egymással. A következőt kapjuk:

$$(6+8x)\cdot 25=4x-1$$

Ez egy elsőfokú egyenlet, amit már könnyedén meg tudunk oldani. Először elhagyjuk a zárójelet úgy, hogy minden tagját beszorozzuk 25-tel:

$$150+200x=4x-1$$

Most rendezzük egy oldalra az x-es tagokat, és egy oldalra a szabad tagokat:

$$200x-4x=-150-1$$

$$196x=-151$$

A 196 szorozza az x-et, tehát ha átviszem a másik oldalra, akkor ott osztani fog.

$$x=\frac{-151}{196}=-\frac{151}{196}$$

Értelmezési tartomány:

$$\log_{\mathbf{5}}(\mathbf{6+8x})+2=\log_{\mathbf{5}}(\mathbf{4x-1})$$

Az alapok rendben vannak, mivel $\mathbf{5}>0, \quad \mathbf{5}\neq 1.$

Az argumentumokat amik ismeretlent tartalmaznak meg kell vizsgálnunk:

$\mathbf{6+8x}>0$	$\mathbf{4x-1}>0$
$8x>-6$	$4x>1$
$x>\frac{-6}{8}$	$x>\frac{1}{4}$
$x>-\frac{3}{4}$	

Azt mondtuk, hogy a két ág metszete lesz az értelmezési tartomány, tehát az a rész a számtengelyen, ahol mindkét színnel festettünk.
Az értelmezési tartomány: $x \in (\frac{1}{4}, \infty)$
Vizsgáljuk meg, hogy az egyenlet megoldása után kapott eredmény beleesik-e ebbe az intervallumba?
A válasz: NEM, tehát a $-\frac{151}{196}$ nem megoldása az egyenletnek.

2.

$$\log_2 8 + \log_2(5x-7) = \log_2(2x+9)$$

Az első szabály alapján a bal oldalon össze tudjuk vonni a két logaritmust:

$$\log_2(8 \cdot (5x-7)) = \log_2(2x+9)$$

Most kaptuk meg azt az alakot amikor elhagyhatjuk a logaritmus függvényt mindkét oldalról.

$$8 \cdot (5x-7) = 2x+9$$

Ez egy elsőfokú egyenlet amit a következő módon oldunk meg: először elhagyjuk a zárójelet, tehát a zárójel minden tagját megszorozzuk 8-cal.

$$40x - 56 = 2x + 9$$

Egy oldalra gyűjtjük az x-es és a szabad tagokat:

$$40x - 2x = 56 + 9$$

$$38x = 65$$

$$x = \frac{65}{38} = 1\frac{27}{38} \approx 1{,}71$$

Értelmezési tartomány:

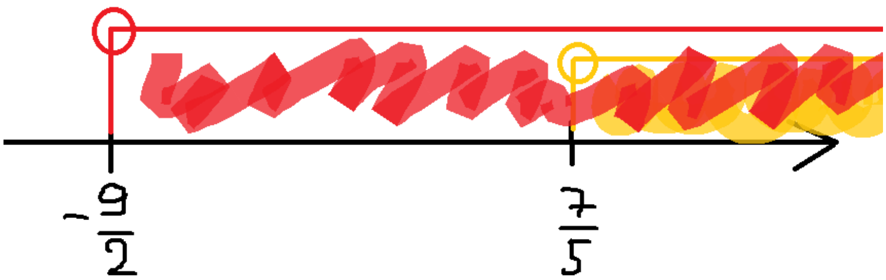
$$\log_2 8 + \log_2(5x-7) = \log_2(2x+9)$$

Az alapok rendben vannak, mivel $2 > 0, \quad 2 \neq 1.$

Az argumentumokat amik ismeretlent tartalmaznak meg kell vizsgálnunk:

$$5x - 7 > 0$$
$$5x > 7$$
$$x > \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} = 1{,}4$$

$$2x + 9 > 0$$
$$2x > -9$$
$$x > \frac{-9}{2}$$
$$x > -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2}$$



Azt mondtuk, hogy a két ág metszete lesz az értelmezési tartomány, tehát az a rész a számtengelyen, ahol mindkét színnel festettünk.
Az értelmezési tartomány: $x \in (\frac{7}{5}, \infty)$
Vizsgáljuk meg, hogy az egyenlet megoldása után kapott eredmény beleesik-e ebbe az intervallumba?
A válasz: IGEN, tehát elfogadjuk megoldásnak.

3.

$$\log_2(4 - 5x) - \log_2(8x + 1) = 3$$

A célunk, hogy megkapjuk a következő alakot: $\log_2$ ☺ $=$ $\log_2$ ☼, tehát hogy CSAK a kettes alapú logaritmus és az argumentumuk legyen mindkét oldalon, és semmi más.

A bal oldalon a 2. szabály segítségével tudjuk összevonni a két logaritmust, a jobb oldalon pedig az 5. szabály segítségével tudjuk a 3-ast átírni kettes alapú logaritmus formájába. Azért csinálunk a hármasból pont kettes alapú logaritmust, mert az egyenletünkben eddig minden logaritmusnak 2-es alapja van.

Tehát az említett szabályokat alkalmazva a következőt kapjuk:

$$\log_2\left(\frac{4 - 5x}{8x + 1}\right) = \mathbf{\log_2 2^3}$$

Most, hogy elértük a kívánt alakot, el tudjuk hagyni a logaritmus függvényeket mindkét oldalon.

$$\frac{4 - 5x}{8x + 1} = 2^3$$

$$\frac{4 - 5x}{8x + 1} = 8$$

A $8x + 1$ mivel oszt a bal oldalon, ezért ha átvisszük a jobb oldalra, ott szorozni fog. Nagyon figyelünk, hogy az egész $8x + 1$-et szorozza a 8, tehát muszáj zárójelbe raknunk, mikor átvittük a jobb oldalra.

$$4 - 5x = 8 \cdot (8x + 1)$$

A zárójelet elhagyjuk, minden tagját beszorozzuk 8-cal:

$$4-5x=64x+8$$

Az x-es tagokat egy oldalra rendezzük, majd a szabad tagokat is.

$$-5x-64x=8-4$$

$$-69x=4$$

Mivel a -69 szorozza az x-et, ezért a másik oldalon a -69 fog osztani

$$x=\frac{4}{-69}=-\frac{4}{69}\approx-0{,}056$$

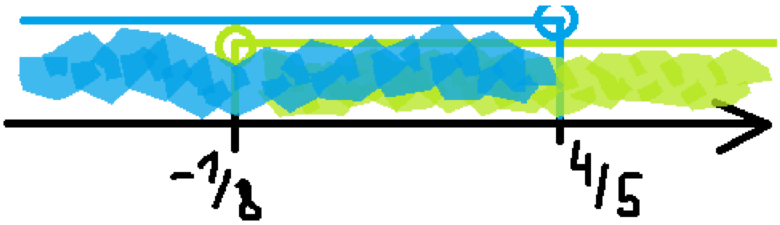
Értelmezési tartomány:

$$\log_2(4-5x)-\log_2(8x+1)=3$$

Az alapok rendben vannak, mivel $2>0, 2\neq 1$.

Az argumentumokat amik ismeretlent tartalmaznak meg kell vizsgálnunk:

$4-5x>0$	$8x+1>0$
$-5x>-4\quad /\cdot(-1)$ FORDUL A JEL!	$8x>-1$
$5x<4$	$x>\frac{-1}{8}$
$x<\frac{4}{5}$	$x>-\frac{1}{8}\approx-0{,}125$



Azt mondtuk, hogy a két ág metszete lesz az értelmezési tartomány, tehát az a rész a számtengelyen, ahol mindkét színnel festettünk.
Az értelmezési tartomány: $x\in(-\frac{1}{8},\frac{4}{5})$
Vizsgáljuk meg, hogy az egyenlet megoldása után kapott eredmény beleesik-e ebbe az intervallumba?
A válasz: IGEN, tehát elfogadjuk megoldásnak.

4.

$$\log_3(6x+4)+\log_3 9=\log_3(10-5x)$$

Bal oldalon az első szabályt alkalmazzuk:

$$\log_3((6x+4)\cdot 9)=\log_3(10-5x)$$

$$(6x+4)\cdot 9=10-5x$$

$$54x+36=10-5x$$

$$54x+5x=10-36$$

$$59x=-26$$

$$x = \frac{-26}{59} = -\frac{26}{59}$$

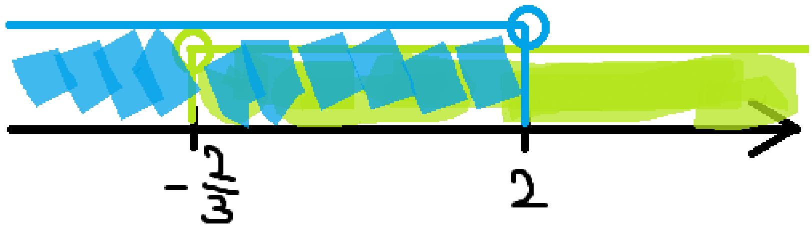
Értelmezési tartomány:

$$\log_3(\mathbf{6x+4}) + \log_3 9 = \log_3(\mathbf{10-5x})$$

Az alapok rendben vannak, mivel a $\mathbf{3} > 0$, $\mathbf{3} \neq 1$.
Az argumentumokat amik ismeretlent tartlmaznak meg kell vizsgálnunk alaposabban:

$$\mathbf{6x+4} > 0$$
$$6x > -4$$
$$x > \frac{-4}{6}$$
$$x > -\frac{2}{3}$$

$$\mathbf{10-5x} > 0$$
$$-5x > -10 \quad /\cdot(-1)$$ FORDUL A JEL!
$$5x < 10$$
$$x < \frac{10}{5}$$
$$x < 2$$



Azt mondtuk, hogy a két ág metszete lesz az értelmezési tartomány, tehát az a rész a számtengelyen, ahol mindkét színnel festettünk.

Az értelmezési tartomány: $x \in (-\frac{2}{3}, 2)$

Vizsgáljuk meg, hogy az egyenlet megoldása után kapott eredmény beleesik-e ebbe az intervallumba?
A válasz: IGEN, tehát elfogadjuk megoldásnak.